Rozdział 4

Problemy obliczalności

W tym rozdziale rozpatrujemy problemy spełnialności i prawdziwości formuł modalnych w danym systemie dowodzenia. Pokażemy, problem prawdziwości formuł modalnych w danym systemie formalnym jest roztrzygalny tzn., że dla każdego systemu dowodzenia $\mathbb{S}$ istnieje algorytm $\mathcal{A}_{\mathbb{S}}$, który dla każdej formuły ϕ sprawdza w czasie skończonym czy ϕ jest prawdziwa w $\mathbb{S}$ (tzn, czy zachodzi relacja $\vdash_{\mathbb{S}} \phi$).

4.1 Roztrzygalność

Najpierw definujemy dwa pojęcia: *długość formuły* i *podformuły* dla danej formuły ψ. Intuicyjnie, długość formuły ψ (oznaczona przez $|\psi|$) jest ilością symboli logicznych wystepujących w ψ. Formalnie długość formuły możemy definiowac rekurencyjnie względem budowy formuły:

$$
\begin{array}{rcl}
|p| & = & 1 \qquad \text{dla } p \in VAR \\
|\neg\psi| & = & |\psi| + 1 \\
|\psi \wedge \phi| & = & |\psi \vee \phi| = |\psi \rightarrow \phi| = |\psi| + |\phi| + 1 \\
|\Box\psi| & = & |\Diamond\psi| = |\psi| + 1
\end{array}
$$

Na przykład dla formuły

$$\psi = \Box(p \rightarrow \Box(q \vee \neg r)) \wedge \neg r \tag{4.1}$$

mamy $|\psi| = 11$. Pojęcie podformuły też można definiować rekurencyjnie:

Definicja 37. *Formułą ϕ nazywamy podformułą formuły ψ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia jednen z następujących warunków:*

- $\phi = \psi$;
- $\psi = \neg\theta$ *i* ϕ *jest podformułą* θ;
- $\psi = \psi_1 \odot \psi_2$ *(gdzie* $\odot \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$*) i* ϕ *jest albo podformułą* ψ_1 *lub podformułą* ϕ_2;
- $\psi = \Box\theta$ *i* ϕ *jest podformułą* θ;

Zbiór wszystkich podformuł ψ *oznaczamy przez* $Sub(\psi)$

Na przykład dla formuły ψ definiowanej wzorem (4.1) mamy

$$Sub(\psi) = \{p, q, r, \neg r, q \vee \neg r, \Box(q \vee \neg r), p \rightarrow \Box(q \vee \neg r), \Box(p \rightarrow \Box(q \vee \neg r)), \psi\}$$

Następny lemat jest ważny dla dalszych rozważeń. Jego dowód pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie

Lemat 38. *Dla każdej formuły* ψ *zachodzi nierówność*

$$|Sub(\psi)| \leq |\psi|$$

Zanim udowodnimy twierdzenie o roztrzygalności, pokażemy natępujące twierdzenia

Twierdzenie 39. *Dla każdej struktury* $(\mathcal{K}, val, s)$ *i formuły* ψ*, relację*

$$(\mathcal{K}, val, s) \models \psi$$

można sprawdzić w czasie $O(|\psi| \cdot |\mathcal{K}|^2)$

> **Dowód:** *Uporządkujemy podformuły* ψ *według ich długości:*
>
> $$Sub(\psi) = \{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_k\}$$
>
> *Po kolei, dla* $i = 1, 2, ...$*, sprawdzamy relację* $(\mathcal{K}, val, s) \models \phi_i$ *dla wszystkich stanów* s *w* $\mathcal{K}$*. Dla każdej ustalonej formuły* ϕ_i*, czas sprawdzeń dla wszystkich stanów wynosi* $O(|\mathcal{K}|^2)$.
>
> ∎

Twierdzenie 40. *Jeśli formuła ψ jest niesprzeczna w systemie dowodzenia $\mathbb{S}$ to istnieje model $\mathcal{K}$ dla $\mathbb{S}$ o niewięcej niż $2^{|\psi|}$ stanach.*

Dowód: *Przez $Sub^*(\phi)$ oznaczamy zbiór wszystkich podformuł i ich negacje tzn.:*

$$Sub^*(\psi) = Sub(\psi) \cup \{\neg\phi : \phi \in Sub(\psi)\}$$

Podobnie jak w przypadku twierdzenia o pełności, rozpatrywamy pewne podzbiory formuł $\Sigma \in Sub^*(\psi)$, które są niesprzeczne (tzn. $\Sigma \nvdash_{\mathbb{S}} \bot$). Niech **MAXCON**$(\psi)$ *będzie rodziną* maksymalnie niesprzecznych zbiorów formuł *z $Sub^*(\psi)$. Konstrujemy model Kripkego $\mathcal{K} = (\mathbf{S}, \longrightarrow)$. Zbiór stanów definiujemy przez $\mathbf{S} = \{s_\Sigma : \Sigma \in \mathbf{MAXCON}(\psi)\}$. Relację przejścia $\longrightarrow$ między stanami $s_\Sigma, s_\Lambda \in \mathbf{S}$ określamy jak następująco:*

$$s_\Sigma \longrightarrow s_\Lambda \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall_\theta\ [\Box\theta \in \Sigma \Rightarrow \theta \in \Lambda]$$

dla dowolnej zmiennej $p \in Sub(\phi)$ i stanu $\Sigma \in \mathbf{S}$, wartościowanie *val* definiujemy *przez*

$$val(p, \Sigma) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } p \in \Sigma, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Pokażemy, że dla każdej formuły $\phi \in Sub(\psi)$ mamy

$$\mathcal{K}, s_\Sigma \models_{\mathbb{S}} \phi \qquad \Leftrightarrow \qquad \phi \in \Sigma \tag{4.2}$$

Pokażemy przez indukcję. Jeśli $\phi = p$ jest zmienną to (4.2) jest prawdziwe z definicji wartościowania. Jeśli $\phi = \neg\phi_1$ lub $\phi = \phi_1 \odot \phi_2$ dla $\odot \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, ..\}$, to (4.2) też jest prawdziwe.

Rozpatrujemy przypadek, gdy $\phi = \Box\theta$ i $\phi \in \Sigma$. Pokażemy, że $(\mathcal{K}, s_\Sigma) \models_{\mathbb{S}} \phi$. Istotnie, niech $s_{\Lambda_1}, ..., s_{\Lambda_k}$ będą następnikami wierzchołka s_Σ w modelu $\mathcal{K}$, wówczas formuła θ musi należeć do zbiorów $\Lambda_1, ..., \Lambda_k$. Z założenia indukcyjnego mamy $(\mathcal{K}, s_{\Lambda_1}) \models_{\mathbb{S}} \theta$ i $(\mathcal{K}, s_{\Lambda_2}) \models_{\mathbb{S}} \theta$, ..., $(\mathcal{K}, s_{\Lambda_1}) \models_{\mathbb{S}} \theta$. Czyli $\mathcal{K}, s_\Sigma \models \phi$.

Z drugiej strony, niech $\phi = \Box\theta$ i $(\mathcal{K}, s_\Sigma) \models_{\mathbb{S}} \phi$. Niech $\Sigma/\Box = \{\theta : \Box\theta \in \Sigma\}$. Wówczas możemy pokazać, że $(\Sigma/\Box) \cup \{\neg\theta\}$ musi być sprzecznym zbiorem formuł, bo w przeciwnym przypadku, istniałoby rozszerzenie $(\Sigma/\Box) \cup \{\neg\theta\} \subseteq \Lambda \in$ **MAXCON**. *Stan s_Λ jest następnikiem stanu s_Σ według definicji i z założenia indukcyjnego mamy $(\mathcal{K}, s_\Lambda) \models_{\mathbb{S}} \neg\theta$ co jest sprzeczne z tym, że $(\mathcal{K}, s_\Sigma) \models_{\mathbb{S}} \phi$. Skoro $(\Sigma/\Box) \cup \{\neg\theta\}$ jest sprzecznym zbiorem, to istnieją formuły $\phi_1, ...\phi_k \in \Sigma/\Box$ takie, że $\mathbb{S}, \phi_1, ..., \phi_k, \neg\theta \vdash \bot$, czyli*

$$\mathbb{S} \vdash \phi_1 \wedge ... \wedge \phi_k \rightarrow \theta$$

Stosując regułę wymuszania mamy:

$$\mathbb{S} \vdash \Box(\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_k \rightarrow \theta)$$

czyli

$$\mathbb{S} \vdash \Box\phi_1 \wedge ... \wedge \Box\phi_k \rightarrow \Box\theta$$

Skoro $\Box\phi_1, ..., \Box\phi_k \in \Sigma$ to $\Box\theta$ też musi należeć do Σ ■