LOGIKA STOSOWANA

Wykład fakultatywny
kierunek: Matematyka,
Semestr letni, 1998–1999

Nguyen Hung Son
Instytut Matematyki UW
Warszawa, ul.Banacha 2
son@mimuw.edu.pl

Rozdział 1

Rachunek zdań

1.1 Język rachunku zdań

Język rachunku zdań składa się z następujących elementów:

1. **Symbole**:
   - Nieskończony zbiór zmiennych zdaniowych $VAR = \{p, q, r, ...\}$
   - 4 wyróżnione symbole: $\neg, \vee, (,)$.
2. **Reguły składania:** Podajemy definicję rekurencyjną pojęcia "*poprawnie zdefiniowanych formuł zdaniowych*" lub krótko *formuł zdaniowych*
   - Zmienne zdaniowe ze zbioru $VAR = \{p, q, r, ...\}$ są formułami zdaniowymi.
   - Jeśli ϕ jest formułą zdaniową to $\neg\phi$ też jest formułą zdaniową
   - Jeśli ϕ i ψ są formułami zdaniowymi, to $(\phi \vee \psi)$ jest formułą zdaniową.

Zbiór wszystkich formuł oznaczamy przez $FORM$. Symbole $\neg$ i $\vee$ nazywamy *spójnikami logicznymi* (lub *operatorami logicznymi*). Intujcyjnie, nawiasy są wprowadzone po to, aby określić kolejność działania, dlatego mogą one być usunięte z języka. W celu uproszczenia opisów oraz ułatwienia pisania formuł, wprowadzamy do języka dodatkowe stałe $\top, \bot$ oraz operatory $\wedge$,

$\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, które są definowane jak następująco:

$$\begin{aligned}
\phi \wedge \psi &=_{def} \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \\
\phi \Rightarrow \psi &=_{def} \neg\phi \vee \psi \\
\phi \Leftrightarrow \psi &=_{def} (\neg\phi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \phi) \\
\top &=_{def} p \vee \neg p \text{ dla pewnej zmiennej } p \in Var \\
\bot &=_{def} p \wedge \neg p \text{ dla pewnej zmiennej } p \in Var
\end{aligned}$$

Znaczenia operatorów logicznych i stałych (które mogą być traktowane jako operatory 0-argumentowe) są podane w następnym rozdziale.

1.2 Semantyka dwu-wartościowa

Rozpatrujemy zbiór $\mathcal{B} = \{0, 1\}$. Utożsamiamy 0 z wartością logiczną *FAŁSZ*, a 1 – *PRAWDA*. Wówczas operatory logiczne są skojarzone z odpowiednimi funkcjami na $\mathcal{B}$. Spójnik $\neg$ jest skojarzony z funkcją $\neg : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ taką, że $\neg(x) = 1 - x$. Dwuczłonowe spójniki logiczne są skojarzone z funkcjami postaci

$$* : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$$

gdzie $*$ oznacza dowolny operator ze zbioru $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \Leftrightarrow\}$. Funkcje te są definiowane przez następną tabelkę (truth table):

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \rightarrow y$	$x \Leftrightarrow y$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Intuicyjnie, $\vee, \wedge, \rightarrow$ można traktować jak spójniki *... lub ...*, *... i ...* oraz *jeśli ... to ...* w języku naturalnym. Nyzywamy je odpowiednio: *alternatywą*, *koniunkcją*, *implikacją*. Wprowadźmy formalną definicję semantyki formuł zdaniowych:

Definicja 1. *Wartościowaniem nazywamy każdą funkcję*

$$v : VAR \to \mathcal{B}$$

Dla każdego wartościowania możemy definiować semantykę dla formuł, czyli funkcję:

$$[\![.]\!]_v : FORM \to \mathcal{B}$$

przez rekursję względem struktury następująco:

(Const)

$$[\![\top]\!]_v = 1; \quad [\![\bot]\!] = 0$$

(Var) *dla zmiennych* $p \in VAR$

$$[\![p]\!]_v = v(p)$$

($\neg$) *dla dowolnej formuły* $\phi \in FORM$

$$[\![\neg\phi]\!]_v = 1 - [\![\phi]\!]_v$$

($*$) *dla dowolnych formuł* $\phi, \psi \in FORM$

$$[\![\phi * \psi]\!]_v = [\![\phi]\!]_v * [\![\psi]\!]_v$$

gdzie $*$ *jest dowolnym operatorem logicznym (np.* $\vee, \wedge, \Rightarrow$, *...)*

Mówimy, że wartościowanie v jest *modelem* dla formuły ϕ wtedy, i tylko wtedy, gdy

$$[\![\phi]\!]_v = 1$$

wówczas mówimy, że ϕ jest prawdziwa w modelu v. W roku 1936, Tarski wprowadził pojęcie "*wynikania logicznego*" (lub relację "*semantycznej konsekwencji*"). Ta relacja jest zdefiniowana w sposób następujący. Mówimy, że formuła ϕ wynika logicznie ze zbioru formuł Φ i piszemy

$$\Phi \models \phi$$

jeśli formuła ϕ jest prawdziwa w każdym modelu dla wszystkich formuł z Φ. Formuły ϕ, dla których zachodzi relacja

$$\models \phi$$

(czyli są prawdziwe dla wszystkich wartościowań) nazywamy *tautologiami.*

1.3 Syntaktyka

Celem rachunku zdań jest opisywanie "*syntaktycznego wynikania*" dla relacji semantycznej konsekwencji $\models$ poprzez definiowanie przybliżonego, *formalnego systemu dedukcji* (system dowodzeń). W tym rozdziale, wprowadzamy taki system dedukcji (Hilbert), który łatwo można będzie uogólnić w przypadku logiki modalnej. Każdy system dedukcji składa się ze zbioru aksjomatów i zbioru reguł dedukcyjnych. W przypadku rachunku zdań, system dedukcji składa się z:

- Aksjomatów. Aksjomatami są tautologie oraz formuły postaci

  (k) $\phi \to (\theta \to \phi)$

  (l) $(\theta \to (\psi \to \phi)) \to ((\theta \to \psi) \to (\theta \to \phi))$

  wraz z aksjomatami dotyczącymi innych spójników logicznych.

- Jednej reguły dedukcyjnej zwanej *modus ponens* lub *regułą odrywania*:

$$\frac{\theta \qquad \theta \to \phi}{\phi} \quad (Modus\ ponens)$$

  Są one użyte do zdefiniowania relacji "*syntaktycznej konsekwencji*"

Definicja 2. *Niech Φ będzie zbiorem formuł.*

(a) Przez **wywód z** Φ *rozumiemy każdy ciąg formuł*

$$\phi_0, \phi_1, ..., \phi_n$$

taki, że dla każdej formuły ϕ_i z ciągu, zachodzi conajmniej jeden z następujących warunków:

1. $\phi_i \in \Phi$
2. ϕ_i *jest aksjomatem*
3. *Istnieją formuły ϕ_j, ϕ_k występujące wcześniej w tym ciągu (tzn. $j, k < i$) takie, że $\phi_k = (\phi_j \to \phi_i)$*

(b) Dla każdej formuły ϕ, relacja

$$\Phi \vdash \phi$$

zachodzi wtedy, i tylko wtedy, gdy istnieje wywód z Φ, na końcu którego otrzymujemy ϕ.

Relacja $\Phi \vdash \phi$ jest symulacją pojęcia logicznej konsekwencji. Przypomnijmy, że ten system ma "*własność dedukcyjną*":

Twierdzenie 3 (o dedukcji). *Dla każdego zbioru formuł* Φ *oraz pary formuł* θ, ϕ*, zachodzi implikacja*

$$\Phi, \theta \vdash \phi \quad \Rightarrow \quad \Phi \vdash (\theta \to \phi) \tag{1.1}$$

Niestety, ta ważna własność nie zachodzi dla większości systemów modalnych.

1.4 Twierdzenie o pełności

Można łatwo udowodnić (przez indukcję), że system dedukcyjny jest rozsądny, tzn.

$$\Phi \vdash \phi \quad \Rightarrow \quad \Phi \models \phi$$

Pokażemy jego zupełność. Mówimy, że zbiór formuł Φ jest *niesprzeczny* jeśli nie zachodzi relacja

$$\Phi \vdash \bot$$

Niech **CON** będzie zbiorem wszystkich niesprzecznych zbiorów formuł Φ. Zbiór **CON** spełnia następujące warunki:

1. Dla każdego zbioru Φ mamy $\Phi \in \mathbf{CON}$ wtw, gdy $\Psi \in \mathbf{CON}$ dla każdego skończnego podzbioru $\Psi \subseteq \Phi$.

2. Dla każdej zmiennej $p \in VAR$ mamy $\{p, \neg p\} \notin \mathbf{CON}$ oraz, oczywiście $\{\bot\} \notin \mathbf{CON}$

3. Dla każdego zbioru $\Phi \in \mathbf{CON}$ oraz dla dowolnych formuł ϕ, θ mamy

$$\begin{aligned} (\phi \wedge \theta) \in \Phi &\Rightarrow \Phi \cup \{\phi, \theta\} \in \mathbf{CON} \\ \neg(\phi \vee \theta) \in \Phi &\Rightarrow \Phi \cup \{\neg\phi, \neg\theta\} \in \mathbf{CON} \\ \neg(\phi \to \theta) \in \Phi &\Rightarrow \Phi \cup \{\phi, \neg\theta\} \in \mathbf{CON} \end{aligned}$$

4. Dla każdego zbioru $\Phi \in \mathbf{CON}$ oraz dla dowolnych formuł ϕ, θ mamy

$$\begin{aligned} (\phi \vee \theta) \in \Phi &\Rightarrow \Phi \cup \{\phi\} \in \mathbf{CON} \;\; \textit{lub} \;\; \Phi \cup \{\theta\} \in \mathbf{CON} \\ \neg(\phi \wedge \theta) \in \Phi &\Rightarrow \Phi \cup \{\neg\phi\} \in \mathbf{CON} \;\; \textit{lub} \;\; \Phi \cup \{\neg\theta\} \in \mathbf{CON} \\ (\phi \to \theta) \in \Phi &\Rightarrow \Phi \cup \{\neg\phi\} \in \mathbf{CON} \;\; \textit{lub} \;\; \Phi \cup \{\theta\} \in \mathbf{CON} \end{aligned}$$

5. Dla każdego zbioru $\Phi \in \mathbf{CON}$ i każdej formuły ϕ mamy

$$\neg\neg\phi \in \Phi \quad \Rightarrow \quad \Phi \cup \{\phi\} \in \mathbf{CON}$$

Oznaczmy przez **MAXCON** rodzinę maksymalnie niesprzecznych zbiorów formuł, tzn. takich zbiorów $\Psi \in \mathbf{CON}$, że dla każdego zbioru formuł $\Phi \in \mathbf{CON}$ mamy

$$\text{jeśli } \Psi \subseteq \Phi \quad \text{to} \quad \Psi = \Phi$$

Następujący lemat jest bardzo ważny dla dowodu o pełności systemu dowodzenia.

Lemat 4. *Dla każdego zbioru $\Phi \in \mathbf{CON}$ istnieje $\Sigma \in \mathbf{MAXCON}$ taki, że $\Phi \subseteq \Sigma$.*

Dowód: *Niech $\{\psi_i : i < \omega\}$ będzie numeracją wszystkich formuł. Definiujemy ciąg zbiorów formuł $\{\Delta_r : r < \omega\}$ jak następująco:*

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \Phi \\ \Delta_{r+1} &= \begin{cases} \Delta_r \cup \{\phi_r\} & \text{jeśli ten zbiór należy do } \mathbf{CON}, \\ \Delta_r & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \end{aligned}$$

Zauważmy, że $\Delta \in \mathbf{CON}$ dla wszystkich $r < \omega$, wówczas definiujemy

$$\Sigma = \bigcup\{\Delta_r : r < \omega\} \in \mathbf{CON}$$

Z przeprowadzonej konstrukcji również mamy $\Sigma \in \mathbf{MAXCON}$ ■

Twierdzenie 5. *Każdy zbiór formuł $\Phi \in \mathbf{CON}$ ma model.*

Dowód: *Niech Σ będzie maksymalnie niesprzecznym zbiorem formuł takim, że $\Phi \subseteq \Sigma$. Definiujemy wartościowanie $v_\Sigma : VAR \to \{0,1\}$ jak następujaco:*

$$v_\Sigma(p) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \ p \in \Sigma, \\ 0 & \text{jeśli } p \notin \Sigma. \end{cases}$$

Łatwo można pokazać, że wartościowanie v_Σ jest modelem dla Φ. ■

Twierdzenie 6. *Dla każdego zbioru formuł Φ oraz każdej formuły ϕ mamy*

$$\Phi \vdash \phi \quad \Leftrightarrow \quad \Phi \models \phi$$

Dowód: *Implikacja* ($\Rightarrow$) *jest oczywista. Zatem wystarczy udowodnić* ($\Leftarrow$). *Załóżmy, że* $\Phi \models \phi$, *wówczas zbiór* $\Phi \cup \{\neg\phi\}$ *nie posiada modelu, i na mocy Twierdzenia 5 mamy*

$$\Phi \cup \{\neg\phi\} \notin \mathbf{CON}$$

czyli

$$\Phi, \{\neg\phi\} \vdash \bot$$

Z własności Dedukcji *(por. równanie 1.1) mamy*

$$\Phi \vdash (\neg\phi \to \bot)$$

czyli (z pewnego aksjomatu)

$$\Phi \vdash (\neg\bot \to \phi)$$

Ale wiemy, że $\Phi \vdash \neg\bot$ *zawsze zachodzi, stąd mamy* $\Phi \vdash \phi$. *(c.n.d)* ■

1.5 Twierdzenie o zwartości

Przypominamy, że zbiór fromuł Φ jest niesprzeczny jeśli nie zachodzi relacja $\Phi \vdash \bot$, co oznacza (por. twierdzenie o pełności), że posiada on model tzn. istnieje wartościowanie, w którym wszystkie formuły z Φ są prawdziwe. Dlatego niesprzeczny zbiór formuł nazywamy również *spełnialnym*. Rozważmy problem decycyjny, który sprawdza czy dany zbiór jest spełnialny (*problem spełnialność formuł*). To oznacza, że spełnialność zbioru formuł Φ można sprawdzić dwiema równoważnymi metodami:

- Metodą ekperymentalną: sprawdzenie czy istnieje model dla Φ wśród wszystkich możliwych wartościowań
- Metodą teoretyczną: sprawdzenie czy można dowieść $\bot$ z Φ za pomocą reguł dedukcyjnych.

W tym rozdziale podajemy jeszcze jedną metodę sprawdzenia spełnialności zbioru formuł. Pokażemy następujące twierdzenie zwane *twierdzeniem o pełności*:

Twierdzenie 7. *Jeśli każdy skończony podzbiór zbioru formuł* Φ *ma model to* Φ *również ma model.*

Dowód: *Niech Φ będzie dowolnym zbiorem formuł takim, że każdy jego skończony podzbiór ma model, wystarczy pokazać, że Φ jest niesprzeczny. Istotnie, gdyby Φ był sprzeczny, to istniałby wywód*

$$W = \langle \phi_0, \phi_1, ...\phi_n, \perp\rangle$$

dla relacji $\Phi \vdash \perp$. Wówczas istnieje skończnony zbiór $\Psi \subseteq \Phi$, dla którego W również jest wywodem. Zatem $\Psi \vdash \perp$, czyli skończony zbiór Psi nie ma modelu co jest sprzeczne z założeniem. ■

ZADANIA

1. Wyprowadź formalne wywody dla następujących tautologii jedynie za pomocą logicznych aksjomatów (k) i (l):

   (a) $\vdash \phi \to \phi$;

   (b) $\vdash (\psi \to \phi) \to ((\theta \to \psi) \to (\theta \to \phi))$;

   (c) $\vdash (\theta \to (\psi \to \phi)) \to (\psi \to (\theta \to \phi))$

   (d) $\vdash (\theta \to \psi) \to ((\psi \to \phi) \to (\theta \to \phi))$

   (e) $\vdash (\theta \to (\theta \to \psi)) \to (\theta \to \psi)$

   Jakie są długości tych wywodów.

2. Udowodnij Twierdzenie o własności dedukcji (por. 1.1).

   $$\Phi, \theta \vdash \phi \qquad \Rightarrow \qquad \Phi \vdash (\theta \to \phi)$$

   Wsk. Stosuj indukcję względem długości dowodu.

3. Udowodnij prawdziwość tautologii z zadania 1 za pomocą własności dedukcji. Porównaj długości dowodów w obu przypadkach.

Rozdział 2

Logika Modalna

2.1 Wstęp

2.2 Języki logiki modalnej

W języku logiki modalnej nad sygnaturą I korzystamy z następujących symboli:

- zbiór zmiennych zdaniowych $VAR = \{p, q, r, ...\}$
- Spójniki rachunku zdań:

$$\neg, \vee, \top, \bot, \rightarrow, \wedge$$

- Rodzina spójników modalnych

$$\{\Box_i : i \in I\}$$

wraz z nawiasami '(' i ')' do określenia kolejność obliczenia.

Definicja 8. *Formuły w języku modalnym nad sygnaturą I są definiowane rekurencyjnie jak następująco:*

[Formuły atomowe:] *Zmienne zdaniowe ze zbioru $VAR = \{p, q, r, ...\}$ oraz $\top, \bot$ są formułami.*

[Formuły zdaniowe:] *Jeśli ϕ i ψ są formułami, to*

$$\neg\phi, \quad (\phi \vee \psi), \quad (\phi \wedge \psi), \quad (\phi \to \psi)$$

są formułami.

[Formuły modalne:] *Jeśli ϕ jest formułą, to*

$$\Box_i \phi$$

dla każdej etykiety $i \in I$ też jest formułą.

Zbiór wszystkich formuł oznaczamy przez $FORM$.

Przykładem formuły modalnej jest

$$\Box_1((p \wedge q) \vee \Box_2 \neg p) \to p$$

....

Pierwsze badania nad logiką modalną dotyczą języka z jednym spójnikiem. Wówczas formuła $\Box\phi$ może być różnie interpretowana np.:

- Koniecznie, że ϕ zachodzi
- Wiadomo, że ϕ
- ...

Operator modalny może być traktowany jako kwantyfikator ogólny. Możemy wprowadzić dodatkowy operator analogiczny do kwantyfikatora szczególnego: $\Diamond_i$ przez:

$$\Diamond_i \phi =_{def} \neg\Box_i\neg\phi$$

który może być czytany: *możliwe, że ϕ zachodzi.*

Binarna wersja logiki modalnej (zwana *logiką temporalną*) ma dwa operatory modalne: $\boxplus$ oraz $\boxminus$. One mogą być traktowane jako operatory temporalne, tzn. formuła $\boxplus\phi$ jest czytana jako "*ϕ zajdzie w przyszłości*" a formuła $\boxminus\phi$ jest czytana jako "*ϕ zaszła w przeszłości*".

Na tym kursie, ograniczamy nasze zainteresowanie do wyżej wymienionych dwóch języków logiki modalnej.

Pewne rodziny formuł mają szczególne znaczenia w logice modalnej. Przyjmujemy te oznaczenia z pewnych historycznych powodów. Są to:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{D}(\phi) & : & \Box\phi \to \Diamond\phi \\
\mathbf{T}(\phi) & : & \Box\phi \to \phi \\
\mathbf{B}(\phi) & : & \phi \to \Box\Diamond\phi \\
\mathbf{4}(\phi) & : & \Box\phi \to \Box\Box\phi \\
\mathbf{5}(\phi) & : & \Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi \\
\mathbf{P}(\phi) & : & \phi \to \Box\phi \\
\mathbf{Q}(\phi) & : & \Diamond\phi \to \Box\phi \\
\mathbf{R}(\phi) & : & \Box\Box\phi \to \Box\phi \\
\mathbf{G}(\phi) & : & \Diamond\Box\phi \to \Box\Diamond\phi \\
\mathbf{L}(\phi) & : & \Box\mathbf{T}(\phi) \to \Box\phi \\
\mathbf{M}(\phi) & : & \Box\Diamond\phi \to \Diamond\Box\phi
\end{array}
$$

2.3 Strukturalna Semantyka

Modelem Kripke'go nazywamy parę $\mathcal{K} = \langle \Gamma, val \rangle$ gdzie $\Gamma = (W, E)$ jest skierowanym grafem określającym relację przejścia między *stanami* (lub *światami*) ze zbioru W, a $val : W \times VAR \to \{0, 1\}$ jest wartościowaniem.

Semantyka formuły ϕ w modelu $\mathcal{K}$ i w stanie $q \in W$ jest definiowana przez relację $(\mathcal{K}, val, s) \models \phi$ pomiędzy

- modelem $\mathcal{A}$
- wartościowaniem val
- stanem s (element struktury $\mathcal{K}$)
- formułą modalną ϕ

Jeśli model $\mathcal{K}$ jest ustalony, to będziemy pisali $s \models \phi$ dla uproszczenia.

2.3.1 Podstawowa relacja spełnialności

Definicja 9. *Dla każdego stanu $s \in W$, definiujemy funkcję*

$$[\![\cdot]\!]_s : FORM \to \{0, 1\}$$

przez indukcję względem konstrukcji formuły ϕ:

(Const)

$$[\![\top]\!]_s = 1; \quad [\![\bot]\!]_s = 0$$

(Var) *dla zmiennych* $p \in VAR$

$$[\![p]\!]_s = val(s,p)$$

$(\neg)$ *dla dowolnej formuły* $\phi \in FORM$

$$[\![\neg\phi]\!]_s = 1 - [\![\phi]\!]_s$$

$(*)$ *dla dowolnych formuł* $\phi, \psi \in FORM$

$$[\![\phi * \psi]\!]_s = [\![\phi]\!]_s * [\![\psi]\!]_s$$

gdzie $*$ *jest dowolnym operatorem logicznym (np.* $\vee, \wedge, \Rightarrow$*, ...)*

$(\Box)$ *dla dowolnej formuły* $\phi \in FORM$

$$[\![\Box\phi]\!]_s = \prod_{s' \in R(s)} [\![\phi]\!]_{s'}$$

gdzie $R(s)$ *jest zbiorem stanów osiągalnych ze stanu* s*.*

Relacja $s \models \phi$ *zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy* $[\![\phi]\!]_s = 1$*.*

Formalnie, relację $\mathcal{K}, val, s \models \phi$ jest czytana przez: "s wymusza ϕ". Możemy również czytać:

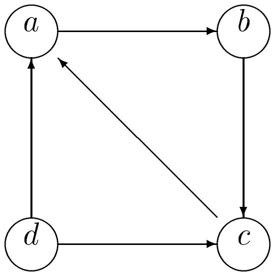
ϕ jest spełniona w modelu $(\mathcal{K}, val, s)$;
ϕ jest prawdziwa w stanie s;
...

Łatwo można się przekonać, że zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 10. *Jeśli formuła* ϕ *jest tautologią rachunku zdań, to* ϕ *jest spełniona we wszystkich stanach modelu Kripke'go.*

2.3.2 Przykład

Załóżmy, że $VAR = \{p\}$. Rozpatrujemy model Kripke'go



Rozpatrzmy następujące wartościowanie:

$$val(p, a) = val(p, c) = 1;$$

$$val(p, b) = val(p, d) = 0;$$

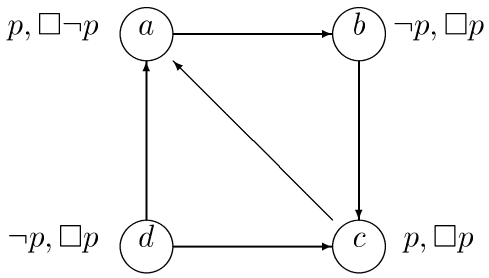
Bezpośrednio z tego wartościowania mamy:

$$a \models p \qquad b \models \neg p \qquad c \models p$$

Dalej, z grafu mamy: $R(a) = \{b\}$, $R(a) = \{c\}$, $R(d) = \{a, b\}$, $R(c) = \{a\}$. Stąd prawdziwość semantyczna zachodzi dla następujących formuł:

$$a \models \Box\neg p \qquad b \models \Box p \qquad d \models \Box p$$

Możemy przerysować przykładowy graf razem z formułami prawdziwymi semantycznie w wierzchołkach:



Rozpatrzmy formuły o dwóch operatorach modalnych. Zauważmy, że:

$$a \models \Box\Box p \qquad b \models \Box\Box p \qquad c \models \Box\Box\neg p$$

Ponadto stan d jest bardzo interesujące, gdyż z niego można doiść do innych stanów jak następująco:

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[r] & b \arrow[r] & c \arrow[r] & a\dots \\
d \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
 & c \arrow[r] & a \arrow[r] & b \arrow[r] & c\dots
\end{tikzcd}$$

Dla stanu d mamy:

$$d \models \Box p \qquad d \models \neg\Box^2 p \qquad d \models \neg\Box^3 p \qquad d \models \Box^4 p$$

itp... Dla stanu a mamy tylko jedną ścieżkę o długości 3:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] & b \arrow[r] & c \arrow[r] & a
\end{tikzcd}$$

Zatem dla każdej formuły ϕ:

$$a \models \Box^3\phi \qquad \Leftrightarrow a \models \phi$$

czyli

$$a \models (\Box^3\phi \leftrightarrow \phi)$$

Z tego samego powodu, formuła $(\Box^3\phi \leftrightarrow \phi)$ jest pradziwa w stanach b i c. Stąd możemy pokazać, że

$$d \models (\Box^4\phi \leftrightarrow \Box\phi)$$

Twierdzenie 11. *Niech $(\mathcal{K}, val)$ będzie modelem Kripke'go. Wówczas*

$$a \models \Diamond\phi \qquad \Leftrightarrow \qquad (\exists x \in R(a))[x \models \phi]$$

Dowód:

$$\begin{aligned}
a \models \Diamond\phi \quad &\Leftrightarrow \quad a \models \neg\Box\neg\phi \\
&\Leftrightarrow \quad \neg[a \models \Box\neg\phi] \\
&\Leftrightarrow \quad \neg(\forall x \in R(a))[x \models \neg\phi] \\
&\Leftrightarrow \quad (\exists x \in R(a))\neg[x \models \neg\phi] \\
&\Leftrightarrow \quad (\exists x \in R(a))[x \models \phi]
\end{aligned}$$

■

2.3.3 Trzy relacje spełnialności

Wprowadzamy trzy relacje spełnialności

$$\models^p \qquad \models^v \qquad \models^u$$

dla formuł modalnych. Są one zdefiniowane następująco:

- Relacja punktowa $\models^p$ jest po prostu relacją $\models$ z poprzedniej sekcji. Relacja '$\models^p$' oznacza *model punktowy (stanowy) z wartościowaniem.*
- Relacja $\models^v$ jest stosowana dla *modeli z wartościowaniem.* Jest ona definiowana z relacji punktowej poprzez uogólnienia stanów, czyli

$$\mathcal{K}, val \models^v \phi \qquad \Leftrightarrow \qquad (\forall s \in W)\,\{\mathcal{K}, val, s \models \phi\}$$

- Relację $\models^u$ nazywamy *spełnialnością strukturalną*, gdyż jest ona definiowana z relacji $\models^v$ następująco

$$\mathcal{K} \models^u \phi \qquad \Leftrightarrow \qquad (\forall val)\,\{\mathcal{K}, val \models^v \phi\}$$

Na przykład dla modelu w poprzedniej sekcji mamy

$$\mathcal{K}, val \models^v P \to \Box^3 P$$

ale (np dla wartościowania $val(P, \{a, b, c, d\} = \{0, 0, 0, 1\}))$ mamy

$$\text{nie prawda, że } \mathcal{K} \models^u \neg P \to \Box^3 P$$

Za to relacja spełnialności strukturalnej zachodzi dla

$$\mathcal{K} \models^u \Box^4 P \leftrightarrow \Box P$$

Lemat 12. *Jeżeli dana struktura $\mathcal{K} = (W, E)$ jest odpowiednio*

1. *zwrotna*
2. *przechodnia*
3. *dyskretny*
4. *gęsty*

to, w każdej sytuacji następujące formuły

1. $\Box\phi \to \phi$
2. $\Box\phi \to \Box^2\phi$
3. $\phi \to \Box\phi$
4. $\Box^2 \to \Box\phi$

są spełnialne w $\mathcal{K}$ (w relacji $\models^u$)

....

ZADANIA

1. Rozpatrzmy modele $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \to \rangle$, gdzie dla dowolnych $x, y \in \mathbb{N}$

   (a) $x \to y \Leftrightarrow x < y$

   (b) $x \to y \Leftrightarrow x \leq y$

   (c) $x \to y \Leftrightarrow x > y$

   (d) $x \to y \Leftrightarrow x \geq y$

   Dla formuł $\Phi \in \{\mathbf{D}, \mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{4}, \mathbf{5}...\}$ definiowanych na stronie 11, uzupełnić następującą tabelę znakami

   $\surd$ – jeśli $\mathcal{N} \models \Phi$

   $\times$ – jeśli $\mathcal{N} \models \neg\Phi$

   $\circ$ – jeśli nie zachodzi $\mathcal{N} \models \Phi$ ani $\mathcal{N} \models \neg\Phi$

	D	**T**	**B**	**4**	**5**	**P**	**Q**	**R**	**G**	**L**	**M**
(a)	$\surd$										
(b)	$\surd$										
(c)	$\circ$										
(d)	$\surd$										

2. Pokazać, że w każdego przechodniego modelu $\mathcal{K}$ spełnialne są następujące formuły:

   - $\mathcal{K} \models \Box\Diamond\Diamond\phi \leftrightarrow \Box\Diamond\phi$
   - $\mathcal{K} \models (\Box\Diamond)^2\phi \leftrightarrow \Box\Diamond\phi$

2.4 Relacje konsekwencji sematycznej

Wzorując na logice rachunku zdań, chcemy definiować pojęcie

"Formuła modalna ϕ jest logiczną kosekwencją zbioru Φ modalnych hipotez"

Na pierwszy rzut oka, problem wygląda na dość oczywisty. Np. to zachodzi wówczas, gdy ϕ jest prawdziwa w każdym modelu dla zbioru Φ. Ale są dwa zasadnicze problemy:

- Po pierwsze to nie jest oczywiste którego z trzech modeli należy użyć. Z trzech relacji nie mamy wskazania, która z nich jest lepsza od innych.
- Po drugie, nie wiadomo która formuła modalna może być formułą bazową (aksjomatem), a które nie mogą.

Przypomnijmy, że rozróżnialiśmy trzy typy relacji spełnialności t.j. punktowa, wartościowaniowa, i strukturalna (i oznaczaliśmy je przez p, v i u).

Definicja 13. *Niech $k \in \{u, v, p\}$ będzie typem spełnialności. Dla każdego zbioru formuł Ψ i formuły ϕ, relacja*

$$\Phi \models^k \phi$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy każda k-struktura, która jest modelem dla Ψ jest również modelem dla ϕ. Relację tę nazywamy **relacją konsekwencji logicznej** *lub* **relacją konsekwencji semantycznej**.

Między tymi relacjami zachodzi następujące twierdzenie

Twierdzenie 14. *Dla każdego zbioru formuł Ψ i każdej formuły ϕ zachodzą następujące implikacje:*

$$\Phi \models^p \phi \qquad \Rightarrow \qquad \Phi \models^v \phi \qquad \Rightarrow \qquad \Phi \models^u \phi$$

Dowód: *Załóżmy, że*

$$\Phi \models^p \phi$$

i zakładamy, że v-struktura $(\mathcal{K}, val)$ jest modelem dla ϕ. Pokażemy, że $(\mathcal{K}, val)$ jest również modelem dla ϕ
.... ■

Na ogół tych implikacji nie można odwrócić. Na przykład ... (str. 93)
¿¿

Na zakończeniu, pokażemy Lemat, który określa pewne własności relacji konsekwencji semantycznej. Własności te stanowią podstawowe aksjomatami w systemach dowodzenia.

Lemat 15. *Następujące implikacje są prawdziwe dla każdego zbioru formuł Ψ i dla dowolnych formuł θ, ϕ:*

(P) $\phi \in \Psi \qquad \Rightarrow \qquad \Psi \models^v \phi$

(MP) $\left.\begin{array}{c} \Psi \models^v \theta \to \phi \\ \Psi \models^v \theta \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \Psi \models^v \phi$

(N) $\Psi \models^v \phi \qquad \Rightarrow \qquad \Psi \models^v \Box\phi$

2.5 Podstawowy system dowodzenia

Aksjomaty:

Zbiór aksjomatów składa się z

1. Wszystkich tautologii rachunku zdań (bez operatorów modalnych)
2. Tautologii typu (K) dla logiki modalnej:

   $(K) \qquad \Box(\phi \to \theta) \Leftrightarrow (\Box\phi \to \Box\theta)$
3. Wszystkich formuł otrzymanych z wyżej wymienionych tautologii przez podstawienie zmiennych formułami

W kolejnych systemach, zbiór $\mathbb{S}$ będzie wzbogacony o kolejne formuły ze zbioru $\{$**D**, **T**, **B**, **4**, **5**...$\}$ formuł zdefiniowanych na stronie 11.

Reguły odrywania

System dowodzenia dla logiki modalnej posiada dwie reguły odrywania:

1. Modus ponens:

$$(MP) \qquad \frac{\theta \qquad \theta \to \phi}{\phi}$$

2. Reguła wymuszania:

$$(N) \qquad \frac{\theta}{\Box\theta}$$

Standardowy system formalny

Podajemy formalną definicję wywodu w systemie dowodzenia $\mathbb{S}$ (określonym przez zbiór aksjomatów $\mathcal{S}$):

Definicja 16. *Niech Φ będzie dowolnym zbiorem formuł modalnych:*

(a) **Wywodem w systemie $\mathbb{S}$ ze zbioru Φ** *nazywamy każdy ciąg formuł*

$$\phi_0, \phi_1, ..., \phi_n$$

taki, że dla każdej formuły ϕ_i z ciągu, zachodzi co najmniej jeden z następujących warunków:

(hyp) $\phi_i \in \Phi$

(aks) *ϕ_i jest aksjomatem (tzn. $\phi_i \in \mathcal{S}$)*

(mp) *Istnieją formuły ϕ_j, ϕ_k występujące wcześniej w tym ciągu (tzn. $j, k < i$) takie, że*

$$\phi_k = (\phi_j \to \phi_i)$$

(n) *Istnieje indeks $s < i$ taki, że*

$$\phi_i = \Box\phi_s$$

(b) **Formuła ϕ jest $\mathbb{S}$-konsekwencją zbioru Φ** *(tzn. konsekwencją w systemie $\mathbb{S}$)*

$$\Phi \vdash_{\mathbb{S}} \phi$$

wtedy, i tylko wtedy, gdy istnieje w systemie $\mathbb{S}$ wywód z Φ, na końcu którego otrzymujemy ϕ.

2.5.1 Przykład

Aby ułatwić rozumienie systemu $\mathbb{S}$, pokażemy niektóre jego własności:

Lemat 17. *Dla dowolnych formuł modalnych ϕ, θ mamy*

$$\models_{\mathbb{S}} \phi \to \theta \qquad \Rightarrow \qquad \models_{\mathbb{S}} \Box\phi \to \Box\theta$$

Dowód: *Niech $\alpha = \phi \to \theta$, kolejne formuły w wywodzie są następujące:*

1. $\alpha = \phi \to \theta$ *(hipoteza)*
2. $\Box(\alpha)$ *(reguła N)*
3. $\Box(\alpha) \to (\Box\phi \to \Box\theta)$ *(aksjomat K)*
4. $\Box\phi \to \Box\theta$*(Modus ponens)*

Czyli jest to wywód o długości 4 w systemie $\mathbb{S}$ ■

2.5.2 Inne systemy formalne

Do systemu standartowego, oprócz aksjomatów typu **K**, możemy dołączyć do zbioru aksjomatów jeszcze formuły typu **D**, **T**, **B**, **4** lub **5**. Np. system standartowe oznaczamy zwykle przez $\mathbb{K}$, gdyś zawierał tylko formuły typu **K**. Systemy $\mathbb{KD}$, $\mathbb{KB}$, $\mathbb{KT}$, $\mathbb{K}4$, $\mathbb{K}5$ są rozszerzeniami systemu $\mathbb{K}$ o aksjomaty typu **D**, **T**, **B**, **4** lub **5**, odpowiednio. Analogicznie możemy rozszerzyć te systemy do np. $\mathbb{KD}4$, $\mathbb{KD}5$, ... Będziemy oznaczać przez

$$\mathbb{S}4 = \mathbb{KT}4 \qquad \mathbb{S}5 = \mathbb{KT}5$$

W ten sposób, możemy otrzymać 32 różnych systemów. Ale, jak później się okaże, wśród nich jest tylko 15 istotnie różnych systemów dowodzenia.

Wprowadzamy pojęcie moc systemu. Mówimy, że *system* $\mathbb{S}_1$ *jest nie mocniejszy niż system* $\mathbb{S}_2$, i oznaczmy to przez $\mathbb{S}_1 \sqsubseteq \mathbb{S}_2$, jeśli

$$\forall\phi \quad (\models_{\mathbb{S}_1} \phi \quad \Rightarrow \quad \models_{\mathbb{S}_2} \phi)$$

Dwa systemy $\mathbb{S}_1$, $\mathbb{S}_2$ są równoważne jeśli $\mathbb{S}_1 \sqsubseteq \mathbb{S}_2$ i $\mathbb{S}_2 \sqsubseteq \mathbb{S}_1$. Mamy następujące fakty:

Lemat 18. *Formuły D są słabsze niż T, tzn.*

$$\mathbb{KD} \le \mathbb{KT}$$

czyli $\mathbb{KD}4 \le \mathbb{S}4$ *i* $\mathbb{KD}5 \le \mathbb{S}5$

Dowód: *Niech*

$$\alpha = \Box\neg\phi \qquad \beta = \Box\phi \qquad \gamma = \neg\alpha = \Diamond\phi$$

$$\begin{array}{cl}
\alpha \to \neg\phi & \textit{(T)} \\
(\alpha \to \neg\phi) \to (\phi \to \neg\alpha) & \textit{(Tautologia)} \\
\phi \to \gamma & \textit{(Modus ponens)} \\
\beta \to \phi & \textit{(T)} \\
(\beta \to \phi) \to ((\phi \to \gamma) \to (\beta \to \gamma)) & \textit{(Tautologia)} \\
((\phi \to \gamma) \to (\beta \to \gamma)) & \textit{(MP)} \\
\beta \to \gamma & \textit{(MP)}
\end{array}$$

■

Lemat 19.

$$\mathbb{KDB}5 \leq \mathbb{S}5$$

Lemat 20.

$$\mathbb{K}4 \leq \mathbb{KB}5 \qquad \mathbb{KDB}4 \leq \mathbb{KDB}5$$

Lemat 21.

$$\mathbb{K}5 \leq \mathbb{KB}5 \qquad \mathbb{KT}5 \leq \mathbb{KTB}4$$

Twierdzenie 22.

$$\mathbb{S}5 = \mathbb{KDB}4 = \mathbb{KDB}5$$

Dowód: *Mamy*

$$\begin{aligned} \mathbb{S}5 &= \mathbb{KT}5 \\ &\leq \mathbb{KTB}4 \\ &\leq \mathbb{KDB}4 \\ &\leq \mathbb{KDB}5 \\ &\leq \mathbb{S}5 \end{aligned}$$

■

ZADANIA

1. zad ds

2.5.3 Poprawność systemu dowodzenia

W poprzednich rozdziałach definiowaliśmy 3 relację konsekwencji semantycznej $\models^k$ dla $k = u, v, p$. Wprowadzamy pojęcie "*logicznej prawdziwości* formuł modalnych:

Definicja 23. *Niech $\mathbb{S}$ będzie standardowym systemem o zbiorze aksjomatów $\mathcal{S}$. Niech $k \in \{u, v, p\}$ będzie typem spełnialności. Dla każdego zbioru formuł Φ i formuły ϕ, relacja*

$$\Phi \models^k_{\mathbb{S}} \phi$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy każda k-struktura, która jest modelem dla $\mathcal{S}$ i dla Φ, jest również modelem dla ϕ

UWAGA: W zasadzie relacja $\models^k_{\mathbb{S}}$ może być zastąpiona przez $\models^k$, gdyż

$$\Phi \models^k_{\mathbb{S}} \phi \quad \Leftrightarrow \quad \Phi \cup \mathcal{S} \models^k \phi$$

ale używamy parametryzowanej wersji $\models^k_{\mathbb{S}}$ w dalszych częściach kursu ze względu na jej prosty sposób zapisu.

Dotąd wprowadziliśmy dla każdego systemu formalnego $\mathbb{S}$ pięć relacji konsekwencji; w tym dwie relacje syntaktycznej konsekwencji:

$$\vdash^w_{\mathbb{S}} \qquad , \qquad \vdash_{\mathbb{S}}$$

i trzy relacje semantycznej konsekwencji:

$$\models^p_{\mathbb{S}} \quad , \quad \models^v_{\mathbb{S}} \quad i \quad \models^u_{\mathbb{S}}$$

Próbujemy odpowiadać na pytanie:

JAK TE RELACJE MAJĄ SIĘ DO SIEBIE?

Pierwsza obserwacja jest następująca:

$$\Phi \vdash^w_{\mathbb{S}} \phi \quad \Rightarrow \quad \Phi \vdash_{\mathbb{S}} \phi$$

Jako wniosek z Twierdzenia 14 (przez postawienie $\Psi = \Phi \cup \mathcal{S}$) mamy

$$\Phi \models^p_{\mathbb{S}} \phi \quad \Rightarrow \quad \Phi \models^v_{\mathbb{S}} \phi \quad \Rightarrow \quad \Phi \models^u_{\mathbb{S}} \phi$$

Możemy dodać do tej listy jeszcze twierdzenie o *poprawności systemu dowodzenia*:

Twierdzenie 24. *Dla każdego systemu $\mathcal{S}$, zbioru hipotez Φ i formuły ϕ mamy zależność:*

$$\Phi \vdash_{\mathbb{S}} \phi \quad \Rightarrow \quad \Phi \models^v_{\mathbb{S}} \phi$$

Dowód: *Indukcja względem długości wywodu dla $\Phi \vdash_{\mathbb{S}} \phi$. Główne kroki indukcyjne dowodzi się za pomocą Lematu 15.* ■

Twierdzenie o poprawności możemy wykorzystac do pokazania, że dwa formalne systemy są istotnie różne. Np. wiemy, że $\mathbb{KD} \sqsubseteq \mathbb{KT}$. Aby pokazać, że te systemy są różne, wystarczy znaleźć formułę ϕ taką, że

$$\vdash_{\mathbb{KT}} \phi \quad i \quad \text{nie prawda, że } \vdash_{\mathbb{K}D} \phi$$

Z Twierdzenia o poprawności wynika, że drugi warunek jest spełniony jeśli pokażemy, że

$$\text{nie prawda, że } \models^{v}_{\mathbb{K}D} \phi$$

2.5.4 ZADANIA

2.6 Twierdzenie o pełności

Niech $\mathbb{S}$ będzie formalnym systemem opartym na zbiorze aksjomatów $\mathcal{S}$. Oznaczamy przez $\mathcal{MOD}(\mathbb{S})$ rodzinę wszystkich modeli, w których $\mathcal{S}$ są prawdziwe (które modelują $\mathcal{S}$). W poprzednich rozdziałach definiowaliśmy już relację $\models^{v}_{\mathbb{S}}$. Możemy ją przedefiniować następująco:

$$\models^{v}_{\mathbb{S}} \phi \quad \Leftrightarrow_{def} \quad \forall_{\mathcal{M}\in\mathcal{MOD}(\mathbb{S})}\mathcal{M} \models^{v} \phi$$

Dla przykładu przypomnijmy, że

2.6.1 Twierdzenie i główne ścieżki dowodu

W tym rozdziale zakładamy, że $\mathbb{S}$ jest ustalonym systemem dowodzenia. Pełność systemu dowodzenia oznacza, że

$$\vdash_{\mathbb{S}} \phi \quad \Leftrightarrow \quad \models^{v}_{\mathbb{S}} \phi$$

Z twierdzenia o poprawności mamy już jedną implikację:

$$\vdash_{\mathbb{S}} \phi \quad \Rightarrow \quad \models^{v}_{\mathbb{S}} \phi$$

Aby pokazać drugą implikację, skonstrujemy specjalny model (v-struktura) $(\mathcal{C}, \nu) \in \mathcal{MOD}(\mathbb{S})$ zwany *modelem kononicznym* dla $\mathbb{S}$. Model $(\mathcal{C}_{\mathbb{S}}, \nu_{\mathbb{S}})$ jest w pewnym sensie najbardziej uniwersalnym modelem w $\mathcal{MOD}(\mathbb{S})$. Własność tę wyrażamy w następnym twierdzeniu:

Twierdzenie 25. *Dla każdego standardowego systemu wraz z modelem kanonicznym $(\mathcal{C}_{\mathbb{S}}, \nu_{\mathbb{S}})$ i dla każdej formuły ϕ, następujące warunki są równoważne* *(i)* $(\mathcal{C}_{\mathbb{S}}, \nu_{\mathbb{S}}) \models^{v} \phi$

(ii) $\vdash_{\mathcal{S}} \phi$

(iii) $\models^{v}_{\mathcal{S}} \phi$

Zauważmy, że implikacja $(ii) \Rightarrow (iii)$ jest po prostu poprawność systemu dowodzenia. Implikacja $(iii) \Rightarrow (i)$ jest oczywista, gdyż $(\mathcal{C}, \nu) \in \mathcal{MOD}(\mathbb{S})$. Zatem główną treścią tego twierdzenia jest implikacja $(i) \Rightarrow (ii)$

2.6.2 Konstrukcja modelu kanonicznego

Intuicyjnie, zbiór formuł Φ jest sprzeczny względem systemu $\mathcal{S}$ jeśli można wyprowadzić formułę $\perp$ ze zbioru Φ. Ponieważ WŁASNOŚĆ DEDUKCJI nie zachodzi dla relacji konsekwencji syntaktycznej, definiujemy pojęcie niesprzecznego zbioru formuł modalnych poprzez relację konsekwencji słabego dowodu $\vdash^{w}_{\mathcal{S}}$:

Definicja 26. *Zbiór formuł modalnych Φ nazywamy niesprzeczny z $\mathbb{S}$ (lub $\mathbb{S}$–niesprzecznym) jeżeli $\neg[\Phi \vdash^{w}_{\mathbb{S}} \perp]$ tzn. jeśli nie istnieją formuły $\phi_1, ..., \phi_n \in \Phi$ takie, że*

$$\vdash_{\mathbb{S}} \phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n \to \perp$$

Oznaczamy przez $\mathbf{CON}(\mathbb{S})$ *zbiór wszystkich $\mathbb{S}$-niesprzecznych zbiorów formuł.*

Definicja 27. *Zbiór formuł modalnych Φ nazywamy maksymalnie niesprzeczny z $\mathbb{S}$ (lub maksymalnie $\mathbb{S}$–niesprzecznym) jeżeli Φ jest $\mathbb{S}$–niesprzeczny i żaden jego właściwy nadzbiór nie jest $\mathbb{S}$–niesprzeczny. Oznaczamy przez* $\mathbf{MAXCON}(\mathbb{S}) \subseteq \mathbf{CON}(\mathbb{S})$ *zbiór wszystkich maksymalnie $\mathbb{S}$–niesprzecznych zbiorów.*

Zbiór $\mathbf{MAXCON}(\mathbb{S})$ ma kilka ciekawych własności. Po pierwsze, z definicji wynika, że każdy zbiór $\Phi \in \mathbf{MAXCON}(\mathbb{S})$ jest rónież elementem zbioru $\mathbf{CON}(\mathbb{S})$, oraz dla każdej formuły ϕ mamy

$$\Phi \cup \{\phi\} \in \mathbf{CON}(\mathbb{S}) \Rightarrow \phi \in Phi$$

Po drugie z niesprzeczności wynika, że nie istnieje taka formuła ϕ taka, że zarówno ϕ i $\neg\phi$ należą do Φ. Z maksymalności, wynika, że dla każdej formuły ϕ, albo ϕ albo $\neg\phi$ musi należeć do Φ. Dowód tego faktu i następującego twierdzenia pozostawiamy czytelnikom jako ćwiczenia.

Twierdzenie 28. *Niech* $\Phi \in \mathbf{MAXCON}(\mathbb{S})$. *Mamy* $\top \in \Phi$, $\bot \notin \Phi$ *oraz*

$$\begin{array}{rcl} \neg\phi \in \Phi & \Leftrightarrow & \phi \notin \Phi \\ \psi \wedge \theta\Phi & \Leftrightarrow & \psi \in \Phi \ i \ \theta \in \Phi \\ \psi \vee \theta\Phi & \Leftrightarrow & \psi \in \Phi \ lub \ \theta \in \Phi \\ \neg\psi \to \theta\Phi & \Leftrightarrow & \psi \notin \Phi \ lub \ \theta \in \Phi \end{array}$$

Musimy, pokazać. że $\mathbf{MAXCON}(\mathbb{S})$ jest niepusty i zawiera dostatecznie dużo zbiorów formuł żeby odróżnić formuły, które powinny być rozróżnialne. Szczegóły są wyrażone w dwóch lematach:

Lemat 29. *(O istnieniu)*
Dla każdego zbioru formuł $\Psi \in \mathbf{CON}(\mathbb{S})$ *istnieje* $\Sigma \in \mathbf{MAXCON}(\mathbb{S})$ *taki, że* $\Phi \subseteq \Sigma$.

> **Dowód:** *Niech* $\{\psi_i : i < \omega\}$ *będzie numeracją wszystkich formuł. Definiujemy ciąg zbiorów formuł* $\{\Delta_r : r < \omega\}$ *jak następująco:*
>
> $$\begin{array}{rcl} \Delta_0 & = & \Phi \\ \Delta_{r+1} & = & \begin{cases} \Delta_r \cup \{\phi_r\} & \textit{jeśli ten zbiór należy do } \mathbf{CON}(\mathbb{S}), \\ \Delta_r & \textit{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \end{array}$$
>
> *Zauważmy, że* $\Delta \in \mathbf{CON}$ *dla wszystkich* $r < \omega$, *wówczas definiujemy*
>
> $$\Sigma = \bigcup \{\Delta_r : r < \omega\} \in \mathbf{CON}$$
>
> *Z przeprowadzonej konstrukcji również mamy* $\Sigma \in \mathbf{MAXCON}$ ■

Z Lematu o istnieniu możemy pokazać, że

Lemat 30. *Dla każdego zbioru formuł* Ψ *i formuły* ϕ, *mamy równoważność*

$$\Psi \vdash^w_{\mathbb{S}} \phi \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall_{\Sigma \in \mathbf{MAXCON}(\mathbb{S})} [\Psi \subseteq \Sigma \Rightarrow \phi \in \Sigma]$$

Stąd mamy wniosek: dla każdej formuły ϕ *mamy*

$$\vdash_{\mathbb{S}} \phi \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall_{\Sigma \in \mathbf{MAXCON}(\mathbb{S})} [\phi \in \Sigma]$$

Jesteśmy już gotowi do skonstruowania struktury modelu kanonicznego $\mathcal{C}_{\mathbb{S}} = (\mathbf{S}, \longrightarrow)$. Zbiór stanów definiujemy przez $\mathbf{S} =$ $\mathbf{MAXCON}(\mathbb{S})$. Relację przejścia $\longrightarrow$ między stanami $\Sigma, \Lambda \in \mathbf{S}$ określamy jak następująco:

$$\Sigma \longrightarrow \Lambda \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall_{\phi}\ [\Box\phi \in \Sigma \Rightarrow \phi \in \Lambda]$$

Czasem używamy oznaczenia $\Lambda \prec \Sigma$ (czyt.: Λ jest następnikiem Σ) zamiast $\Sigma \longrightarrow \Lambda$. Wartościowanie kanoniczne $\nu_{\mathbb{S}} : VAR \times \mathbf{S} \to \{0,1\}$ dla $\mathcal{C}_{\mathbb{S}} = (\mathbf{S}, \longrightarrow)$ definiujemy przez

$$\nu_{\mathbb{S}}(p, \Sigma) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } p \in \Sigma, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

dla dowolnej zmiennej $p \in VAR$ i stanu $\Sigma \in \mathbf{S}$

Z Lematu o istnieniu mamy:

Lemat 31. *Dla każdego stanu $\Sigma \in \mathbf{S}$ i każdej formuły ϕ mamy równoważność:*

$$\Box\phi \in \Sigma \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall_{\Upsilon \prec \Sigma}\,[\phi \in \Upsilon]$$

Możemy również przez indukcję względem konstrukcji formuły udowodnić następujący lemat

Lemat 32. *Dla każdego stanu $\Sigma \in \mathbf{S}$ i każdej formuły ϕ mamy równoważność:*

$$((\mathcal{C}_{\mathbb{S}}, \nu_{\mathbb{S}}), \Sigma) \models \phi \qquad \Leftrightarrow \qquad \phi \in \Sigma$$

Stąd mamy wniosek

Wniosek 33. *Model kanoniczny $(\mathcal{C}_{\mathbb{S}}, \nu_{\mathbb{S}})$ jest modelem dla $\mathbb{S}$*

2.6.3 Dowód twierdzenia 25 (o pełności logiki modalnej)

Dowód: *Pokażmy implikację (i) $\Rightarrow$ (ii). Niech ϕ będzie dowolną formułą. Z powyższych lematów mamy*

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}_{\mathbb{S}}, \nu_{\mathbb{S}}) \models^{v} \phi &\Leftrightarrow \forall_{\Sigma \in \mathbf{S}}((\mathcal{C}_{\mathbb{S}}, \nu_{\mathbb{S}}), \Sigma) \models \phi \\ &\Leftrightarrow \forall_{\Sigma \in \mathbf{S}} \phi \in \Sigma \\ &\Leftrightarrow \vdash \mathbb{S}\phi \end{aligned}$$

Co kończy dowód twierdzenia o pełności. ■

2.7 Pełność w sensie Kripkego

Niech $\mathcal{MOD}$ będzie rodziną wszystkich modeli Kripkego. Każdy model Kripkego (dla logiki jedno-modalnej) możemy interpretować jak relację na zbiorze stanów. Wyróżniamy pewne modele według własności odpowiadającej mu relacji. Oznaczmy przez:

$\mathcal{MOD}^r$: rodzinę wszystkich modeli zwrotnych (reflexive)

$\mathcal{MOD}^s$: rodzinę wszystkich modeli symetrycznych (symmetric)

$\mathcal{MOD}^t$: rodzinę wszystkich modeli przechodnich (transitive)

$\mathcal{MOD}^l$: rodzinę wszystkich modeli szeregowych (serial)[1]

$\mathcal{MOD}^e$: rodzinę wszystkich modeli Euklidesowych (Euclidean)[2]

Możemy również używać jednocześnie kilka górnych indeksów, np. $\mathcal{MOD}^{rst}$ oznacza rodzinę wszystkich modeli zwrotnych, symetrycznych i przechodnich (czyli relacji równoważności).

Z własności aksjomatów możemy pokazać, że

$\mathcal{MOD}^r \subseteq \mathcal{MOD}(\mathbb{T})$;

$\mathcal{MOD}^{rt} \subseteq \mathcal{MOD}(\mathbb{S}4)$

$\mathcal{MOD}^{rts} \subseteq \mathcal{MOD}(\mathbb{S}5)$

$\mathcal{MOD}^{elt} \subseteq \mathcal{MOD}(\mathbb{KD}45)$

Niestety, nie wszystkie inkluzje są odwracalne. Np. nie wszystkie modele w $\mathcal{MOD}(\mathbb{S}5)$ musi być relacją równoważności. Dowód tych obserwacji pozostawimy czytelnikom jako **ćwiczenia**.

Definicja 34. *Mówimy, że system formalny $\mathbb{S}$ jest pełny w sensie Kripkego jeśli*

$$\vdash_{\mathbb{S}} \phi \qquad \Leftrightarrow \qquad \models^u_{\mathbb{S}} \phi$$

dla dowolnej formuły ϕ

[1] R jest szeregowa wtw, gdy $\forall_s \exists_t (s,t) \in R$)

[2] R jest Euclidesowa wtw, gdy $\forall_{s,t,u}((s,t) \in R \wedge (s,u) \in R \Rightarrow (t,u) \in R)$

Definicja 35. *Mówimy, że system formalny $\mathbb{S}$ jest kanoniczny jeśli jego model kanoniczny $\mathcal{C}_{\mathbb{S}}$ jest strukturalnym modelem dla $\mathbb{S}$.*

Twierdzenie 36. *Każdy kanoniczny system jest pełny w sensie Kripkego*

Przykładami systemów kanonicznych są $\mathbb{K}$, $\mathbb{KD}$ i $\mathbb{KR}$.

2.8 Roztrzygalność

W tym rozdziale rozpatrujemy problemy spełnialności i prawdziwości formuł modalnych w danym systemie dowodzenia. Pokażemy, problem przwdziwości formuł modalnej w danym systemie formalnym jest roztrzygalny.

....

2.9 Złożoności obliczeniowe

....